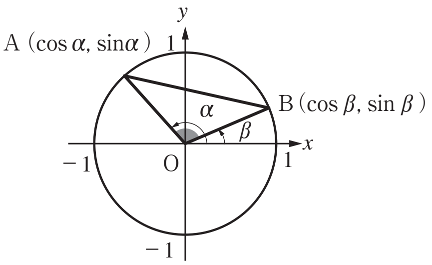
第10講　加法定理

§1 ▶ 正弦・余弦の加法定理

要点整理 と 公式

要点1　正弦・余弦の加法定理

右図の単位円において，角 α，角 β の動径をそれぞれ OA，OB とすると，$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$ である。



線分AB の長さを 2 通りの方法で表す。

2 点 A，B 間の距離の公式より

$$AB^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha$$
$$+ \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \cdots ①$$

また，$\angle AOB = \alpha - \beta$ より，△OAB で余弦定理を用いて

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta) \cdots ②$$

①，②より　$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$

よって，$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdots$ (i) である。

(i)において β を $-\beta$ におきかえると，

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \cdots \text{(ii)}$$

(i)において，α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ におきかえると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$　より

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$$

よって，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ … (iii)

(iii)においてβを$-\beta$におきかえると，

$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ … (iv)

(i)～(iv)より，以下の定理が成り立つ。

■正弦・余弦の加法定理

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

④ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

これを用いることにより，角が和$\alpha+\beta$や差$\alpha-\beta$の形で表された正弦・余弦の値を，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$ を用いて求めることができる。

(ex) $\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin\quad\quad\cos\quad\quad+\cos\quad\quad\sin$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\quad\quad45^\circ\quad\quad30^\circ+\quad\quad45^\circ\quad\quad30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角とする。$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha+\beta)$　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$

(3) $\sin(\alpha-\beta)$　　(4) $\cos(\alpha-\beta)$

Point Pickup

正弦・余弦の加法定理の利用（三角関数の値を出す）

① $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

② $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

④ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

これらの加法定理と，三角関数の相互関係　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，および

角が属する象限（三角関数の符号）に注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 正接の加法定理，2 直線のなす角

要点整理 と 公式

要点2 正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理を導く。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

分母，分子をそれぞれ $\cos\alpha\ \cos\beta$ で割ると

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

よって，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ … (i)

(i)で，β を $-\beta$ におきかえると，

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ より，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ … (ii)

(i)～(ii)より，以下の定理が成り立つ。

■ **正接の加法定理**

① $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

② $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

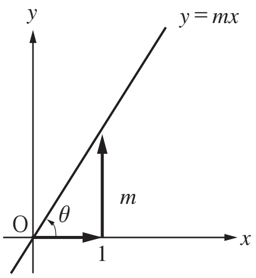
(ex) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)$

$$=\frac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ}=\frac{\quad+\quad}{1-\quad\cdot\quad}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点3 直線と x 軸のなす角と 2 直線のなす角

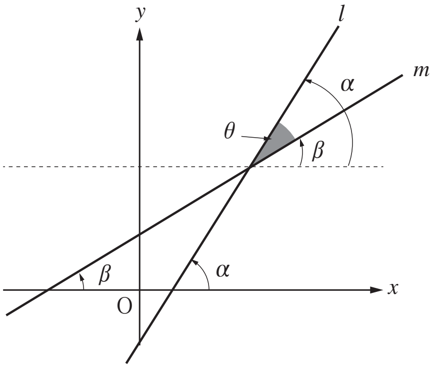


直線 $y = mx$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると，

右図より

$$（傾き）m = \frac{（y\text{の増加量}）}{（x\text{の増加量}）} = \frac{m}{1} = \tan\theta$$

つまり　$m = \tan\theta$　である。



右図のように，2 直線 l，m と x 軸の正の向きのなす角を

それぞれ α，β とすると，2 直線のなす角 θ は

θ =

である。この角 θ について，正接の加法定理を用いると

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

となり，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，つまり 2 直線のそれぞれの

傾きを用いて求めることができる。

直線 l の傾きを m_1，直線 m の傾きを m_2 とすると，$m_1 = \tan\alpha$，$m_2 = \tan\beta$ より

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$　となる。

※なす角 θ は，とくに断りがない限り $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で答える。

上記の計算により $\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$ となった場合は，

$\pi - \theta$ を 2 直線のなす角として答えるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

2 直線 $y = 3x \cdots$ ①，$y = \dfrac{1}{2}x \cdots$ ② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とする。

(1)　$\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan(\alpha+\beta)$の値を求めよ。

(3)　2 直線①，②のなす角 θ を求めよ。

Point Pickup

正接の加法定理

①　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$　　②　$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

2直線のなす角と正接の値

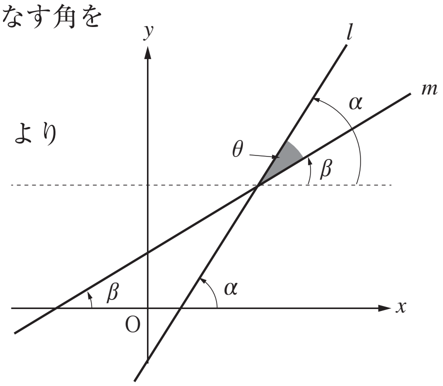
直線 $y = mx + n$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると $m = \tan\theta$

2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ と x 軸の正の向きのなす角を

それぞれ α，β とすると，$m_1 = \tan\alpha$，$m_2 = \tan\beta$

よって，この 2 直線のなす角を θ とすると，$\theta = \alpha - \beta$ より

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 倍角の公式，半角の公式

要点整理 と 公式

要点4　2倍角の公式と半角の公式

正弦・余弦・正接の加法定理のうち，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

において，β を α におきかえると，次の公式が得られる。

■ 2倍角の公式

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

②の第1式において，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を用いると第2式が，$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を用いると第3式が得られる。

これらにより，角度が 2α の三角関数を，その半分の角 α の三角関数で表すことができる。

また，②の第2式より　$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$　よって　$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

②の第3式より　$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$　よって　$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

がそれぞれ得られる。このそれぞれにおいて，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ でおきかえると，次の公式が得られる。

■ 半角の公式

① $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　　② $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

これらにより，角度が α の三角関数を，その倍の角 2α の三角関数で表すことができる。

①，②から $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ が得られる。

※ 2 倍角の公式　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ より $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ が得られる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

$0 < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値

(2)　$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値

Point Pickup

2倍角の公式と半角の公式

2倍角の公式(倍角の公式)で，角度を「半分」に。

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

半角の公式で，角度を「倍」に。

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 三角関数の合成

要点整理 と 公式

要点5 三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形の式を，「加法定理」を用いて変形することで，

1 種類の三角関数に揃えることを考える。

$\sin(\theta+\alpha) =$ 　　　　　　　　　　　　より

$\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha = \sin(\theta+\alpha)$ である。

両辺に r をかけて，$r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = r\sin(\theta+\alpha)$

この式の左辺は，

$r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha = (r\cos\alpha)\cdot\sin\theta + (r\sin\alpha)\cdot\cos\theta$

と変形できる。 これを，$a\sin\theta + b\cos\theta$ と比較すると

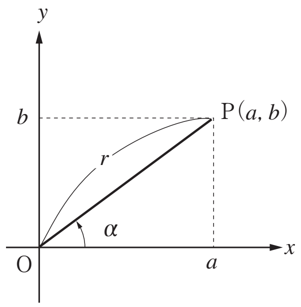
$a = r\cos\alpha$ ，$b = r\sin\alpha$

である。

よって，右図のように

OP $= r$，OP と x 軸の正の向きがなす角が α

であるような点 P $(a,\ b)$ をとると，



$\dfrac{a}{r} =$ 　　　，　$\dfrac{b}{r} =$ 　　　より　$a = r\cos\alpha$ ，$b = r\sin\alpha$

$r =$

となる。

したがって，$a\sin\theta + b\cos\theta$ の式からP $(a,\ b)$ を座標平面上に図示することで，

・三平方の定理により r を

・OP と x 軸の正の向きのなす角を考えることにより α を

それぞれ出すことができ，その r，α を用いて，$r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することができる。

この変形を行うことを，三角関数を「　　　　　　」するという。

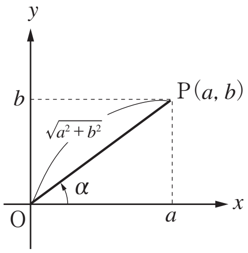
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

■ 三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



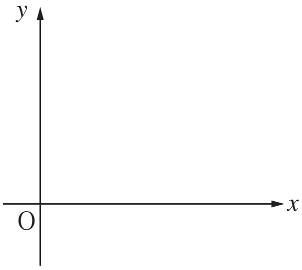
(ex) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を合成する。

点 P(　　,　　) をとると，$OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

線分 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると

$\alpha =$

よって，$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta =$



※$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ より

$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

（1）　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　（2）　$\sin\theta-\cos\theta$

［2］　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=-1$ を解け。

Point Pickup

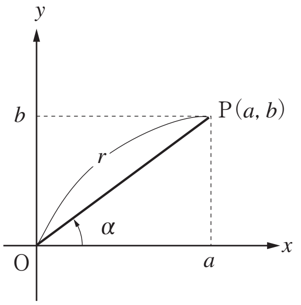
三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形

点Pを $(a,\ b)$ にとり

・$r=\sqrt{a^2+b^2}$

・$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$ となる α



を用いて変形する。

特に断りがなければ，α は $-\pi<\alpha<\pi$ の範囲でとるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　確認テスト

1　α は第3象限，β は第4象限の角とする。$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき，

$\cos\alpha = -\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\sin\beta = -\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。このとき，$\sin(\alpha+\beta) = \boxed{オ}$，

$\cos(\alpha+\beta) = -\boxed{カ}$ である。

2　2直線 $y = -4x$ …①，$y = -\dfrac{3}{5}x$ …② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β と

すると，$\tan\alpha = -\boxed{キ}$，$\tan\beta = -\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。$\tan(\beta-\alpha) = \boxed{コ}$ より，

2直線①，②のなす角を θ とすると，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{サ}}$ である。

3　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$，$\sin 2\alpha = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{9}$，

$\cos 2\alpha = -\dfrac{\boxed{タ}}{9}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{6}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{ツテ}}}{6}$ である。

4　$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \boxed{ト}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{\boxed{ナ}}\right)$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　加法定理

1

α は第 1 象限の角より，$\cos\alpha > 0$

よって，$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

β は第 3 象限の角より，$\sin\beta < 0$

よって，$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$

(1)　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}$

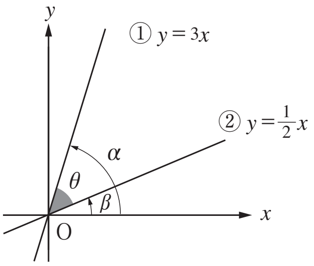
(2)　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}$

(3)　$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{33}{65}$

(4)　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{56}{65}$

2

(1)　$\tan\alpha = 3$，$\tan\beta = \frac{1}{2}$



(2)　$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{3+\frac{1}{2}}{1-3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6+1}{2-3} = -7$

(3)　$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6-1}{2+3} = 1$

よって　$\theta = \frac{\pi}{4}$

3

(1)　$0 < \alpha < \pi$ より，$\sin\alpha > 0$

よって　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$

(2) $0 < \alpha < \pi$　より $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$　　よって $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\frac{\alpha}{2} > 0$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{5+3}{10} = \frac{4}{5}$　　よって $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

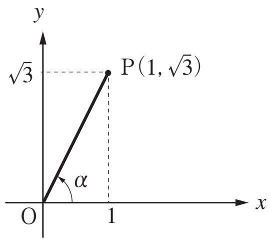
$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{5-3}{10} = \frac{1}{5}$　　よって $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

4

［1］ (1)　点 P$(1, \sqrt{3})$ をとると，$OP = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

線分 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると　$\alpha = \frac{\pi}{3}$

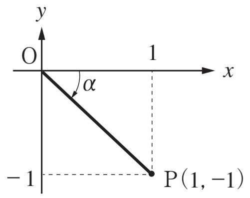
よって，$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$



(2)　点 P$(1, -1)$をとると，$OP = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

線分 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると　$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

よって，$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$



［2］ $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$　より

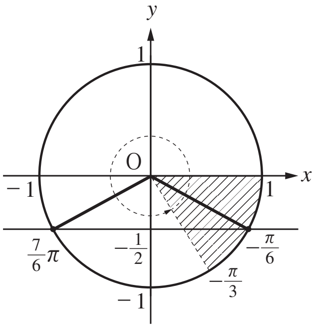
$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = -1$　は　$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -1$　つまり　$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

と変形できる。

$0 \leqq \theta < 2\pi$　より　$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

よって，$\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$，$\frac{7}{6}\pi$

したがって，$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{3}{2}\pi$



第10講　確認テスト

1 α は第3象限，β は第4象限の角とする。$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき，

$\cos\alpha = -\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\sin\beta = -\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。このとき，$\sin(\alpha+\beta) = \boxed{オ}$，

$\cos(\alpha+\beta) = -\boxed{カ}$ である。

2 2直線 $y = -4x$ … ①，$y = -\dfrac{3}{5}x$ … ② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β と

すると，$\tan\alpha = -\boxed{キ}$，$\tan\beta = -\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。$\tan(\beta-\alpha) = \boxed{コ}$ より，

2直線①，②のなす角を θ とすると，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{サ}}$ である。

3 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$，$\sin 2\alpha = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{9}$，

$\cos 2\alpha = -\dfrac{\boxed{タ}}{9}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{6}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{ツテ}}}{6}$ である。

4 $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \boxed{ト}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{\boxed{ナ}}\right)$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1	ア　4	イ　5	ウ　3	エ　5	オ　0
	カ　1				
2	キ　4	ク　3	ケ　5	コ　1	サ　4
3	シ　2	ス　3	セ　4	ソ　5	タ　1
	チ　6	ツ　3	テ　0		
4	ト　2	ナ　6			

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。